ورقة الحلّ – نموذج إجابات

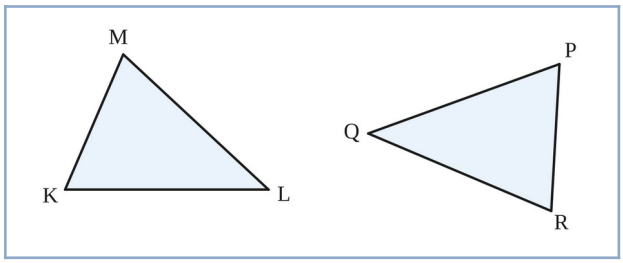
كرّاس تمارين: تطابق المثلّثات – الصف الثامن

الإجابات النهائيّة باللون الأحمر.

★ المستوى الأوّل: سهل ★

السؤال 1 — التناظر في مثلّثين متطابقين ★

معطى: $\Delta KLM \cong \Delta PQR$



1 أكمل الأضلاع المتناظرة المتساوية:

$KL = PQ$ $LM = QR$ $KM = PR$

2 أكمل الزوايا المتناظرة المتساوية:

$\measuredangle K = \measuredangle P$ $\measuredangle L = \measuredangle Q$ $\measuredangle M = \measuredangle R$

السؤال 2 كتابة التطابق بالترتيب الصحيح ★

معطى: $\Delta STU \cong \Delta XYZ$

أيّ كتابة صحيحة وأيّها خاطئة؟ ضع دائرة حول الإجابة.

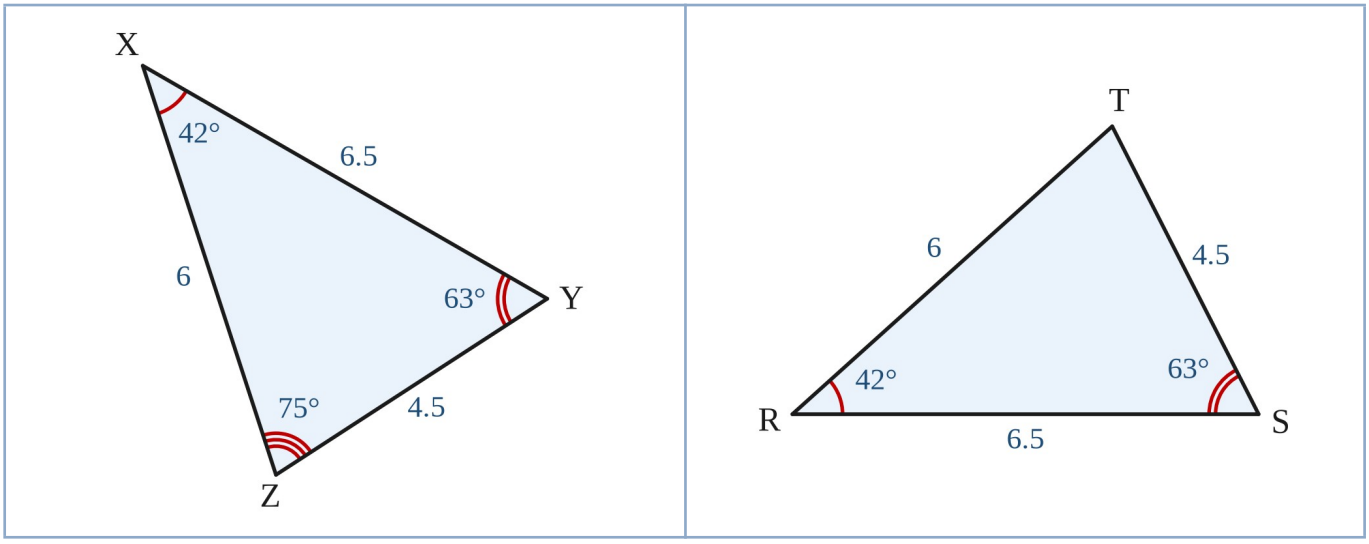
1	$\Delta TSU \cong \Delta YXZ$	صحيح
2	$\Delta UTS \cong \Delta ZYX$	صحيح
3	$\Delta SUT \cong \Delta XYZ$	خطأ
4	$\Delta TUS \cong \Delta YZX$	صحيح
5	$\Delta UST \cong \Delta ZYX$	خطأ

لماذا الكتابة رقم 3 خاطئة؟

لأنّ الرأس U يناظر الرأس Z وليس Y، والرأس T يناظر Y وليس Z.

معطى: $\Delta RST \cong \Delta XYZ$

في الرسم الأيمن قياسات المثلّث RST (الأطوال بالسم).



1 أكمل أطوال أضلاع المثلّث XYZ (بالسم):

$$XY = RS = 6.5 \qquad YZ = ST = 4.5 \qquad XZ = RT = 6$$

2 أكمل قياسات الزوايا:

$$\measuredangle X = \measuredangle R = 42° \qquad \measuredangle Y = \measuredangle S = 63°$$

3 احسب قياس الزاوية Z. اشرح كيف حسبت.

مجموع زوايا المثلّث 180 درجة:

$$\measuredangle Z = 180° - 42° - 63° = 75°$$

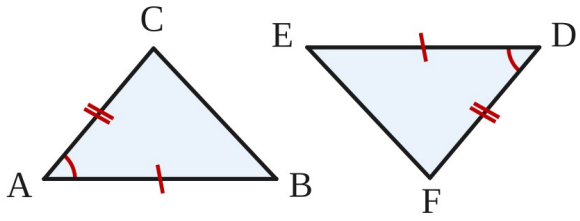
4 اكتب كلّ القياسات على رسم المثلّث XYZ.

انظر الرسم الأيسر.

السؤال 4 هل المثلّثان متطابقان؟ (حسب العلامات) ★

في كلّ بند: هل المثلّثان متطابقان؟ إذا كان الجواب نعم، اكتب حسب أيّ نظريّة وسجّل التطابق بالترتيب الصحيح.

1

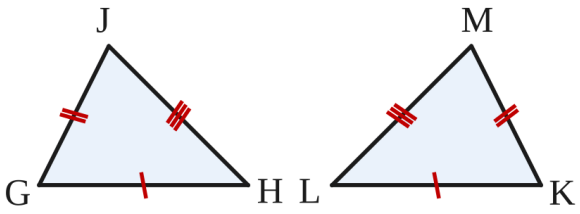


نعم – حسب ض.ز.ض

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ضلعان والزاوية المحصورة بينهما.

2

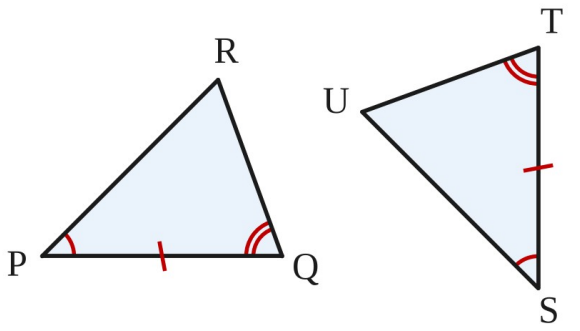


نعم – حسب ض.ض.ض

$\Delta GHJ \cong \Delta KLM$

ثلاثة أضلاع متساوية.

3

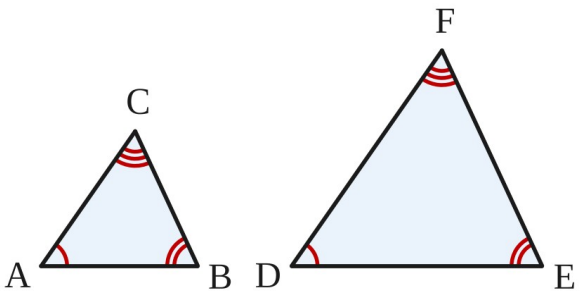


نعم – حسب ز.ض.ز

$\Delta PQR \cong \Delta STU$

زاويتان والضلع المحصور بينهما.

4



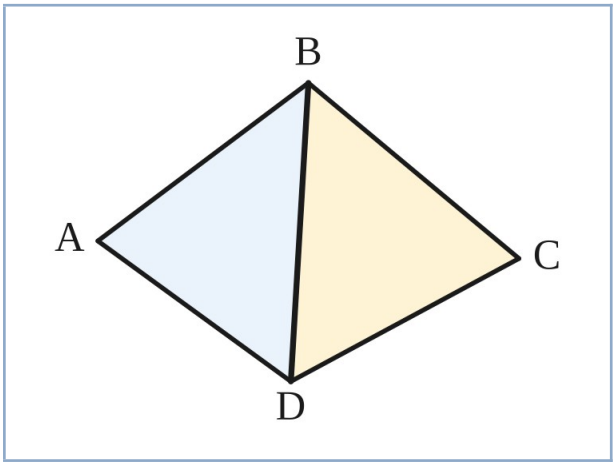
لا

الزوايا فقط متساوية، والمثلّثان بحجمين مختلفين.

السؤال 5 مساواة «مخفيّة» في الرسم ★

في البراهين نستعمل كثيرًا مساواة لا تُكتب في المعطى. أكمل:

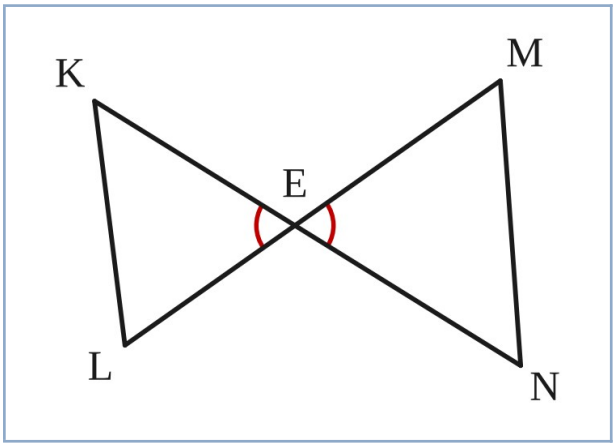
1 المثلّثان ABD و CBD لهما ضلع مشترك.



الضلع المشترك هو:

$$BD = BD$$

2 القطعتان KN و LM تتقاطعان في النقطة E.

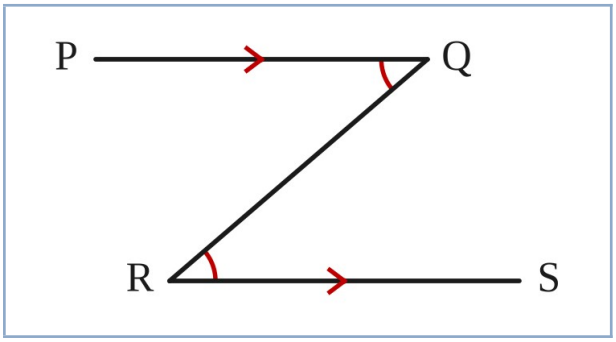


$$\measuredangle KEL = \measuredangle MEN$$

السبب:

زاويتان متقابلتان بالرأس.

3 $PQ \parallel RS$



$$\measuredangle PQR = \measuredangle QRS$$

السبب:

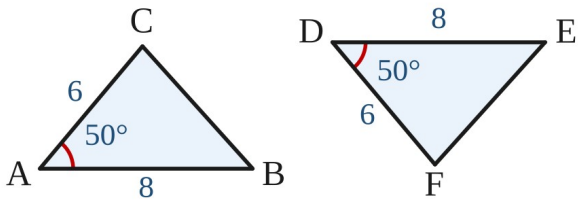
زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين.

★★ المستوى الثاني: متوسّط ★★

السؤال 6 هل المثلّثان متطابقان؟ (حسب القياسات) ★★

الأطوال بالسم. في كلّ بند: هل المثلّثان متطابقان؟ إذا كان الجواب نعم، اكتب النظريّة وسجّل التطابق. إذا كان لا، اشرح لماذا.

1

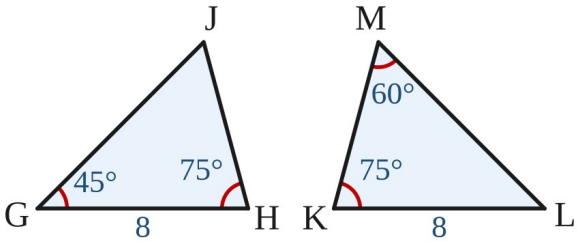


نعم – حسب ض.ز.ض

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

الزاوية 50 درجة محصورة بين الضلعين 8 و 6 في المثلّثين.

2



نعم – حسب ز.ض.ز

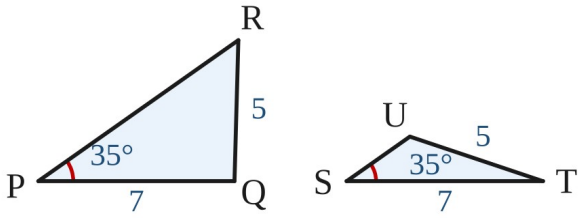
$$\Delta GHJ \cong \Delta LKM$$

حسب مجموع زوايا المثلّث:

$$\measuredangle J = 60° \qquad \measuredangle L = 45°$$

فالضلع 8 محصور بين زاويتين متساويتين في المثلّثين.

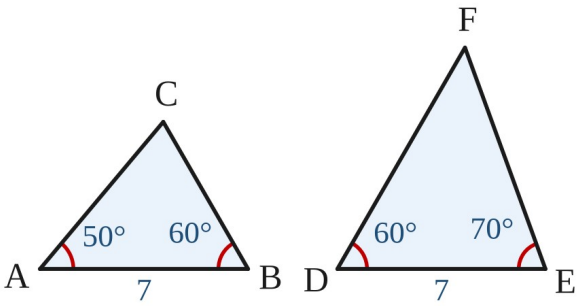
3



لا

الزاوية 35 درجة غير محصورة بين الضلعين 7 و 5، والرسم يبيّن مثلّثين مختلفين.

4



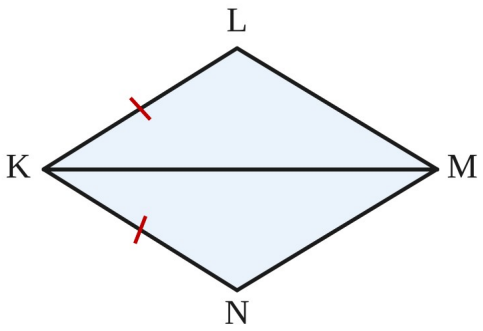
لا

الضلع 7 محصور بين 50 و 60 درجة في الأوّل، وبين 60 و 70 درجة في الثاني؛ فهو ليس ضلعًا متناظرًا.

السؤال 7 ما هو المعطى الناقص؟ ★★

في الرباعيّ $KLMN$ رُسم القطر KM.

معطى: $KL = KN$



1 ماذا يجب أن نضيف كي يتطابق المثلّثان KLM و KNM حسب نظريّة ض.ض.ض؟

$LM = NM$

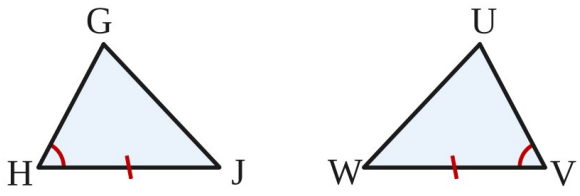
2 وماذا يجب أن نضيف كي يتطابقا حسب نظريّة ض.ز.ض؟

$\measuredangle LKM = \measuredangle NKM$

في الرسم المثلّثان GHJ و UVW.

معطى:

$\measuredangle H = \measuredangle V$ ، $HJ = VW$



3 ماذا يجب أن نضيف كي يتطابق المثلّثان حسب نظريّة ز.ض.ز؟

$\measuredangle J = \measuredangle W$

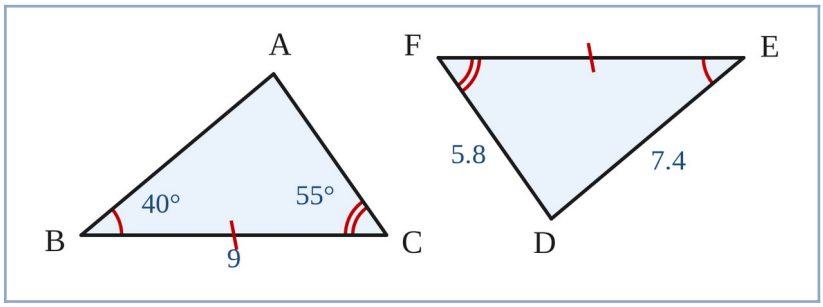
4 وماذا يجب أن نضيف كي يتطابقا حسب نظريّة ض.ز.ض؟

$HG = VU$

5 يوسف قال: «يكفي أن نضيف $GJ = UW$». هل هو محقّ؟ لماذا؟

لا. الزاوية H ليست محصورة بين الضلعين HJ و GJ، وتساوي ضلعين وزاوية غير محصورة لا يكفي للتطابق.

في الرسم المثلّثان ABC و DEF (الأطوال بالسم). العلامات تبيّن العناصر المتساوية.



1 حسب أيّ نظريّة يتطابق المثلّثان؟ سجّل التطابق بالتلاؤم.

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

حسب نظريّة ز.ض.ز

$$\measuredangle B = \measuredangle E \ ، \ BC = EF \ ، \ \measuredangle C = \measuredangle F$$

2 جِد طول الضلع EF.

$$EF = BC = 9$$

3 جِد طولَي الضلعين AB و AC.

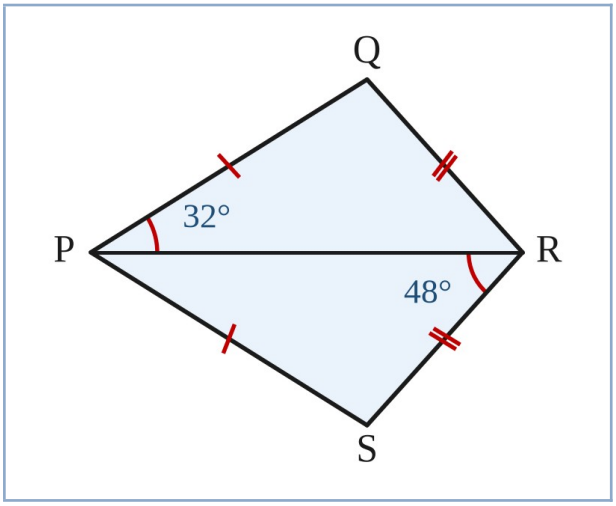
$$AB = DE = 7.4 \qquad AC = DF = 5.8$$

4 احسب قياس الزاوية A وقياس الزاوية D.

$$\measuredangle A = 180° - 40° - 55° = 85°$$

$$\measuredangle D = \measuredangle A = 85°$$

زاويتان متناظرتان في مثلّثين متطابقين.



في الرباعيّ $PQRS$ رُسم القطر PR.

معطى:

$PQ = PS$ ، $RQ = RS$

$\measuredangle QPR = 32°$ ، $\measuredangle PRS = 48°$

1 اشرح لماذا $\Delta PQR \cong \Delta PSR$. حسب أيّ نظريّة؟

$PQ = PS$ (معطى)

$RQ = RS$ (معطى)

$PR = PR$ (ضلع مشترك)

حسب نظريّة ض.ض.ض

2 جِد قياسات الزوايا:

$\measuredangle SPR = \measuredangle QPR = 32°$ $\measuredangle QRP = \measuredangle SRP = 48°$

3 احسب $\measuredangle PQR$ و $\measuredangle PSR$.

$\measuredangle PQR = 180° - 32° - 48° = 100°$

$\measuredangle PSR = \measuredangle PQR = 100°$

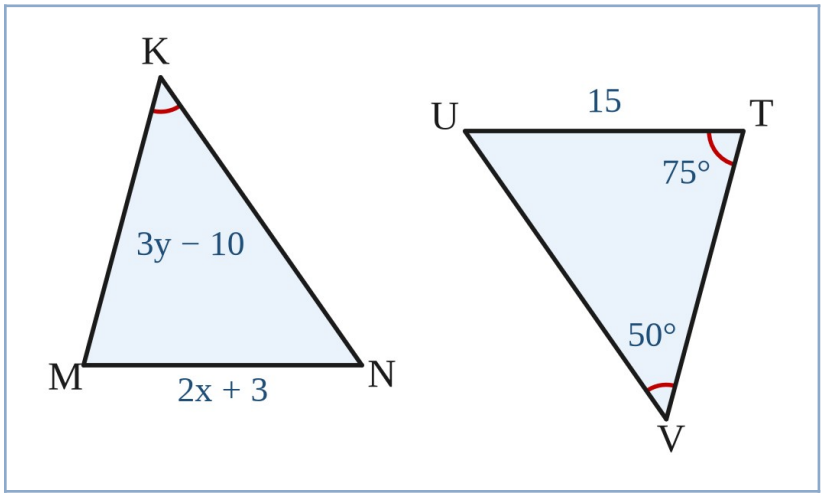
4 احسب $\measuredangle QPS$ و $\measuredangle QRS$.

$\measuredangle QPS = 32° + 32° = 64°$ $\measuredangle QRS = 48° + 48° = 96°$

معطى: $\Delta MNK \cong \Delta TUV$

القياسات مكتوبة على الرسم:

$$MN = 2x + 3 \quad ، \quad \measuredangle K = 3y - 10$$



1 جِد قيمة x.

$MN = TU$ لأنّهما ضلعان متناظران:

$$2x + 3 = 15 \quad \Rightarrow \quad 2x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

2 جِد قيمة y.

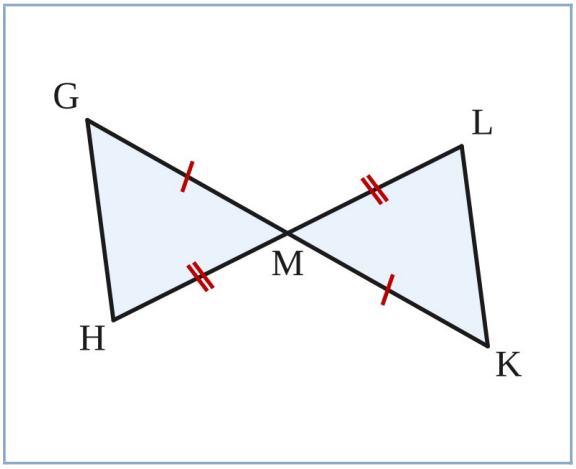
$\measuredangle K = \measuredangle V$ لأنّهما زاويتان متناظرتان:

$$3y - 10 = 50 \quad \Rightarrow \quad 3y = 60 \quad \Rightarrow \quad y = 20$$

3 احسب قياس الزاوية N.

$$\measuredangle M = \measuredangle T = 75° \quad ، \quad \measuredangle K = 50°$$

$$\measuredangle N = 180° - 75° - 50° = 55°$$



القطعتان GK و HL تتقاطعان في النقطة M.

معطى:

$$GM = KM \ ، \ HM = LM$$

1 **برهن أنّ:** $\Delta GMH \cong \Delta KML$

البرهان:

الادّعاء	السبب
$GM = KM$	معطى
$\measuredangle GMH = \measuredangle KML$	زاويتان متقابلتان بالرأس
$HM = LM$	معطى
⇓ $\Delta GMH \cong \Delta KML$	حسب نظريّة التطابق ض.ز.ض

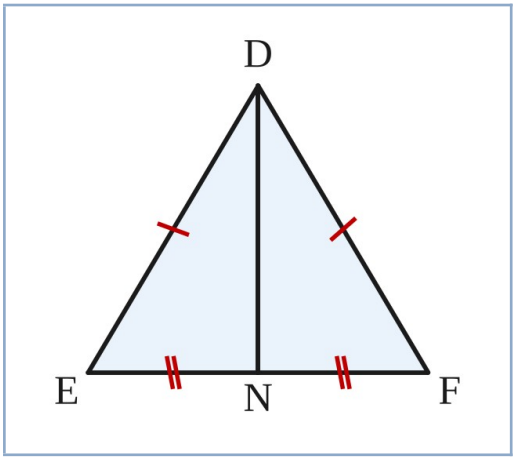
2 سجّل ماذا ينتج من تطابق المثلّثين:

$$GH = KL \qquad \measuredangle G = \measuredangle K \qquad \measuredangle H = \measuredangle L$$

3 استعن بالبند 2 واشرح لماذا $GH \parallel KL$.

$\measuredangle G = \measuredangle K$ وهما زاويتان متبادلتان على القاطع GK، لذلك $GH \parallel KL$.

السؤال 12 برهان موجَّه – متوسّط في مثلّث متساوي الساقين ★★



في المثلّث DEF:

معطى: $DE = DF$

النقطة N منتصف الضلع EF.

1 **برهن أنّ:** $\Delta DEN \cong \Delta DFN$

البرهان:

الادّعاء	السبب
$DE = DF$	معطى
$EN = FN$	N منتصف EF
$DN = DN$	ضلع مشترك
$\Downarrow$ $\boldsymbol{\Delta DEN \cong \Delta DFN}$	حسب نظريّة التطابق ض.ض.ض

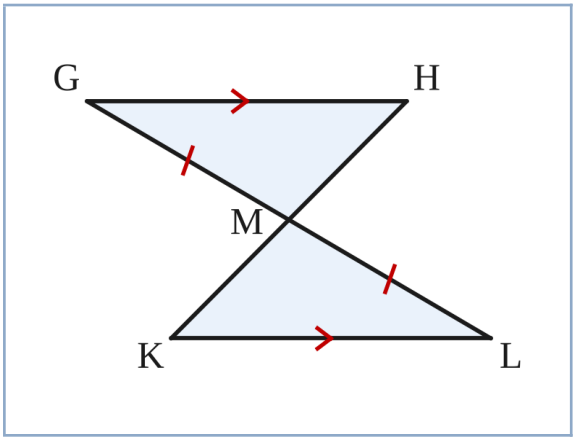
2 سجّل ماذا ينتج من تطابق المثلّثين:

$$\boldsymbol{\measuredangle EDN = \measuredangle FDN} \qquad \boldsymbol{\measuredangle E = \measuredangle F} \qquad \boldsymbol{\measuredangle DNE = \measuredangle DNF}$$

3 احسب $\measuredangle DNE$. علّل.

الزاويتان DNE و DNF متجاورتان على مستقيم، مجموعهما 180 درجة، وهما متساويتان:

$$\boldsymbol{\measuredangle DNE = 180° : 2 = 90°}$$



$GH \parallel KL$

القطعتان GL و HK تتقاطعان في النقطة M.

معطى: $GM = LM$

1 **برهن أنّ:** $\Delta GHM \cong \Delta LKM$

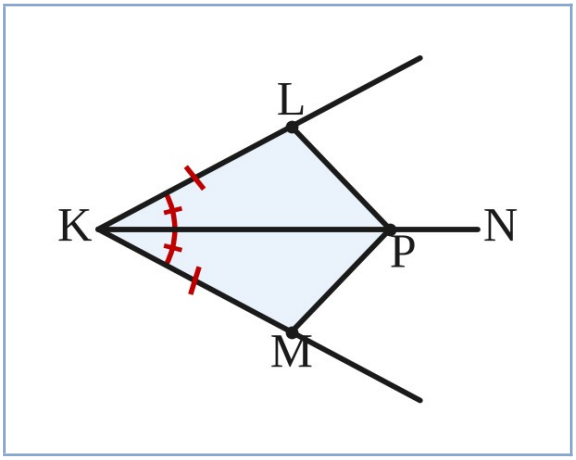
البرهان:

الادّعاء	السبب
$\measuredangle HGM = \measuredangle KLM$	زاويتان متبادلتان، $GH \parallel KL$
$GM = LM$	معطى
$\measuredangle GMH = \measuredangle LMK$	زاويتان متقابلتان بالرأس
⇓ $\Delta GHM \cong \Delta LKM$	حسب نظريّة التطابق ز.ض.ز

2 سجّل ماذا ينتج من تطابق المثلّثين:

$GH = LK$ $\quad HM = KM$ $\quad \measuredangle H = \measuredangle K$

السؤال 14 برهان موجَّه – منصّف زاوية ★★



معطى: $KL = KM$

KN منصّف الزاوية LKM.

النقطة P تقع على المنصّف KN.

1 **برهن أنّ:** $\Delta KLP \cong \Delta KMP$

البرهان:

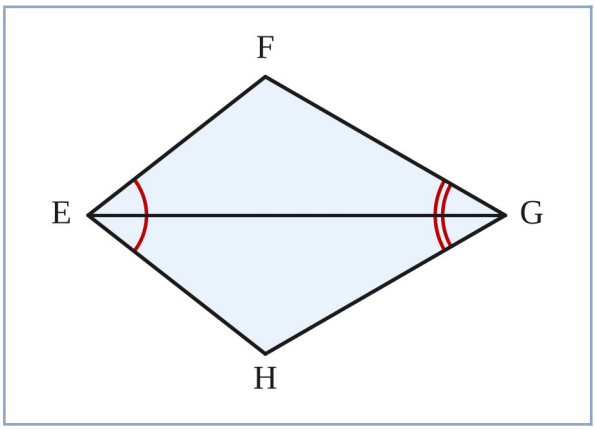
الادّعاء	السبب
$KL = KM$	معطى
$\measuredangle LKP = \measuredangle MKP$	KN منصّف الزاوية
$KP = KP$	ضلع مشترك
$\Downarrow$ $\Delta KLP \cong \Delta KMP$	حسب نظريّة التطابق ض.ز.ض

2 اشرح لماذا $PL = PM$.

PL و PM ضلعان متناظران في مثلّثين متطابقين، لذلك هما متساويان.

★★★ المستوى الثالث: صعب ★★★

السؤال 15 برهان – ضلع مشترك ★★★



في الرباعيّ $EFGH$ رُسم القطر EG.

معطى:

$$\measuredangle FEG = \measuredangle HEG \quad ، \quad \measuredangle FGE = \measuredangle HGE$$

1 برهن أنّ: $\Delta EFG \cong \Delta EHG$

المعطى:

$$\measuredangle FEG = \measuredangle HEG$$
$$\measuredangle FGE = \measuredangle HGE$$

المطلوب برهانه:

$$\Delta EFG \cong \Delta EHG$$

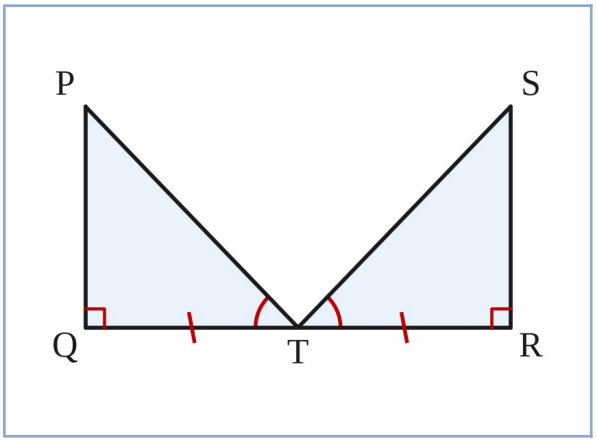
البرهان: (اكتب المتساويات بالتلاؤم)

الادّعاء	السبب
$\measuredangle FEG = \measuredangle HEG$	معطى
$EG = EG$	ضلع مشترك
$\measuredangle FGE = \measuredangle HGE$	معطى
$\Downarrow$ $\Delta EFG \cong \Delta EHG$	حسب نظريّة التطابق ز.ض.ز

وهو المطلوب برهانه ■

2 سجّل ماذا ينتج من تطابق المثلّثين:

$$EF = EH \qquad FG = HG \qquad \measuredangle F = \measuredangle H$$



معطى:

$PQ \perp QR \ ، \ SR \perp QR$

النقطة T منتصف القطعة QR.

$\measuredangle PTQ = \measuredangle STR$

1 برهن أنّ: $\Delta PQT \cong \Delta SRT$

المعطى:

$$PQ \perp QR \ ، \ SR \perp QR$$

$$QT = RT$$

$$\measuredangle PTQ = \measuredangle STR$$

المطلوب برهانه:

$$\Delta PQT \cong \Delta SRT$$

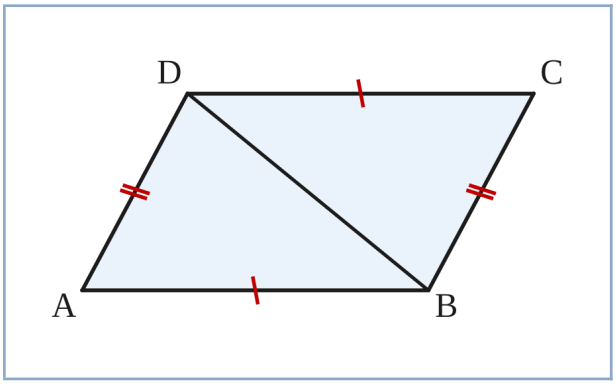
البرهان: (اكتب المتساويات بالتلاؤم)

الادّعاء	السبب
$\measuredangle PQT = \measuredangle SRT = 90°$	معطى، تعامد
$QT = RT$	T منتصف QR
$\measuredangle PTQ = \measuredangle STR$	معطى
⇓ $\Delta PQT \cong \Delta SRT$	حسب نظريّة التطابق ز.ض.ز

وهو المطلوب برهانه ■

2 سجّل ماذا ينتج من تطابق المثلّثين:

$$PQ = SR \qquad PT = ST \qquad \measuredangle P = \measuredangle S$$



في الرباعيّ $ABCD$ رُسم القطر BD.

معطى:

$AB = CD \ ، \ AD = CB$

1 برهن أنّ: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

المعطى:

$$AB = CD$$
$$AD = CB$$

المطلوب برهانه:

$$\Delta ABD \cong \Delta CDB$$

البرهان: (اكتب المتساويات بالتلاؤم)

الادّعاء	السبب
$AB = CD$	معطى
$AD = CB$	معطى
$BD = DB$	ضلع مشترك
$\Downarrow$ $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	حسب نظريّة التطابق ض.ض.ض

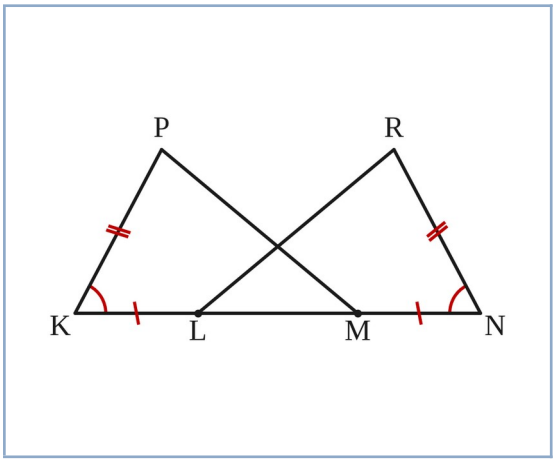
وهو المطلوب برهانه ■

2 سجّل ماذا ينتج من تطابق المثلّثين:

$$\measuredangle A = \measuredangle C \qquad \measuredangle ABD = \measuredangle CDB \qquad \measuredangle ADB = \measuredangle CBD$$

3 استعن بالبند السابق واشرح لماذا $AB \parallel CD$.

$\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$ وهما زاويتان متبادلتان على القاطع BD، لذلك $AB \parallel CD$.



النقاط K, L, M, N تقع على مستقيم واحد بهذا الترتيب.

معطى:

$$KL = MN \ ، \ PK = RN \ ، \ \measuredangle PKL = \measuredangle RNM$$

1 برهن أنّ: $\Delta PKM \cong \Delta RNL$

تلميح: $KM = KL + LM$

المعطى:

$$\boldsymbol{KL = MN}$$
$$\boldsymbol{PK = RN}$$
$$\boldsymbol{\measuredangle PKL = \measuredangle RNM}$$

المطلوب برهانه:

$$\boldsymbol{\Delta PKM \cong \Delta RNL}$$

البرهان: (اكتب المتساويات بالتلاؤم)

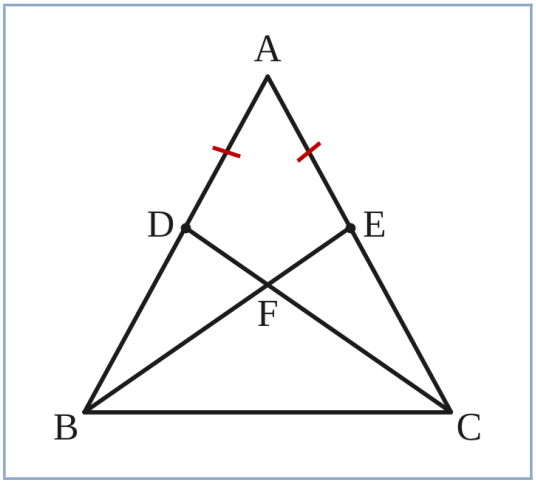
الادّعاء	السبب
$PK = RN$	معطى
$\measuredangle PKM = \measuredangle RNL$	معطى (نفس الزاويتين)
$KM = KL + LM = MN + LM = NL$	جمع قطع متساوية
⇓ $\boldsymbol{\Delta PKM \cong \Delta RNL}$	حسب نظريّة التطابق ض.ز.ض

وهو المطلوب برهانه ■

2 سجّل ماذا ينتج من تطابق المثلّثين:

$$\boldsymbol{PM = RL} \qquad \boldsymbol{\measuredangle P = \measuredangle R} \qquad \boldsymbol{\measuredangle PMK = \measuredangle RLN}$$

السؤال 19 تحدٍّ: تطابقان متتاليان ★★★



معطى:

$AB = AC$ ، $AD = AE$

النقطة D على الضلع AB، والنقطة E على الضلع AC.

القطعتان BE و CD تتقاطعان في النقطة F.

1 **برهن أنّ:** $\Delta ABE \cong \Delta ACD$

الادّعاء	السبب
$AB = AC$	معطى
$\measuredangle A = \measuredangle A$	زاوية مشتركة
$AE = AD$	معطى
⇓ $\Delta ABE \cong \Delta ACD$	حسب نظريّة التطابق ض.ز.ض

2 سجّل زاويتين متساويتين تنتجان من التطابق في البند 1.

$\measuredangle ABE = \measuredangle ACD$ $\quad$ $\measuredangle AEB = \measuredangle ADC$

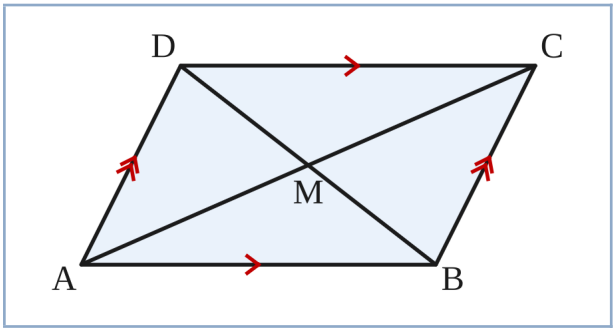
3 برهن أنّ: $\Delta BDF \cong \Delta CEF$

الادّعاء	السبب
$\measuredangle DBF = \measuredangle ECF$	من التطابق في البند 1
$BD = AB - AD = AC - AE = CE$	طرح قطع متساوية
$\measuredangle BDF = \measuredangle CEF$	تكمّلان إلى 180 درجة زاويتين متساويتين من البند 2
⇓ $\boldsymbol{\Delta BDF \cong \Delta CEF}$	حسب نظريّة التطابق **ز.ض.ز**

4 سجّل ماذا ينتج من التطابق في البند 3:

$$\boldsymbol{BF = CF} \qquad \boldsymbol{DF = EF}$$

السؤال 20 تحدٍّ: قطرا متوازي الأضلاع ★★★



في الرباعيّ $ABCD$:

$AB \parallel DC$ ، $AD \parallel BC$

القطران AC و BD يتقاطعان في النقطة M.

1 **برهن أنّ:** $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

الادّعاء	السبب
$\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$	زاويتان متبادلتان، $AB \parallel DC$
$AC = CA$	ضلع مشترك
$\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$	زاويتان متبادلتان، $AD \parallel BC$
$\Downarrow$ **$\Delta ABC \cong \Delta CDA$**	حسب نظريّة التطابق **ز.ض.ز**

2 استنتج أنّ $AB = CD$. علّل.

ضلعان متناظران في مثلّثين متطابقين.

3 برهن أنّ: $\Delta ABM \cong \Delta CDM$

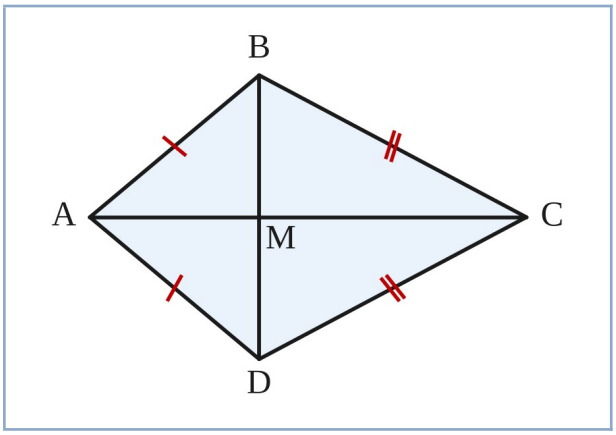
الادّعاء	السبب
$\measuredangle BAM = \measuredangle DCM$	زاويتان متبادلتان، $AB \parallel DC$
$AB = CD$	البند 2
$\measuredangle ABM = \measuredangle CDM$	زاويتان متبادلتان، $AB \parallel DC$
⇓ $\boldsymbol{\Delta ABM \cong \Delta CDM}$	حسب نظريّة التطابق ز.ض.ز

4 ماذا ينتج عن القطرين AC و BD؟

$$\boldsymbol{AM = CM \qquad BM = DM}$$

القطران ينصّف أحدهما الآخر.

السؤال 21 تحدٍّ: قطرا الطائرة الورقيّة ★★★



في الرباعيّ $ABCD$:

$AB = AD \ ، \ CB = CD$

القطران AC و BD يتقاطعان في النقطة M.

1 **برهن أنّ:** $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

الادّعاء	السبب
$AB = AD$	معطى
$CB = CD$	معطى
$AC = AC$	ضلع مشترك
⇓ $\Delta ABC \cong \Delta ADC$	حسب نظريّة التطابق ض.ض.ض

2 استنتج أنّ $\measuredangle BAM = \measuredangle DAM$. علّل.

زاويتان متناظرتان في مثلّثين متطابقين.

3 برهن أنّ: $\Delta ABM \cong \Delta ADM$

الادّعاء	السبب
$AB = AD$	معطى
$\measuredangle BAM = \measuredangle DAM$	البند 2
$AM = AM$	ضلع مشترك
$\Downarrow$ $\boldsymbol{\Delta ABM \cong \Delta ADM}$	حسب نظريّة التطابق ض.ز.ض

4 برهن أنّ $AC \perp BD$، وأنّ $BM = DM$.

$$\boldsymbol{\measuredangle AMB = \measuredangle AMD}$$

من التطابق، ومجموع الزاويتين 180 درجة، لذلك كلّ واحدة منهما 90 درجة، أي أنّ:

$$\boldsymbol{AC \perp BD}$$

$$\boldsymbol{BM = DM}$$

لأنّهما ضلعان متناظران في المثلّثين المتطابقين.